Übungsaufgaben VIII, von 17.12.2001
Musterlösungen

1.

Der Energie (Hamilton) Operator lautet: $\hat{E} = \frac{\hat{p}}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$

Schrödinger-Gleichung: $\hat{E}\psi_E^n = e_n \psi_E^n$

$$\hat{E}\psi_E^n = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_E^n = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{d}{dx}\left(\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\hat{E}\psi_E^n = -\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(-\sin\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{n^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{E}\psi_E^n = \underbrace{\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}_{e_n}\underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}}_{?_E^n}$$

$$\Rightarrow \text{für n=1} \quad \hat{E}\psi_E^1 = \underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}_{E_1}\underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}}_{\psi_E^1} \qquad E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$\Rightarrow \text{für n=2} \quad \hat{E}\psi_E^2 = \underbrace{\frac{\hbar^2 4\pi^2}{2mL^2}}_{E_2}\underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}}_{\psi_E^2} \qquad E_2 = \frac{h^2}{2mL^2}$$

$$\Rightarrow \text{für n=3} \quad \hat{E}\psi_E^3 = \underbrace{\frac{\hbar^2 9\pi^2}{2mL^2}}_{E_3}\underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{3\pi x}{L}}_{\psi_E^3} \qquad E_3 = \frac{9h^2}{8mL^2}$$

2.

Allgemeine Ausdruck für Wahrscheinlichkeit :

$$\int_0^R \psi^*(r)\psi(r)d\tau = \int_0^R \frac{1}{\pi a_0^3}e^{-2r/a_0}\underbrace{d\tau}_{4\pi r^2 dr} = \frac{4}{a_0^3}\int_0^R r^2 e^{-2r/a_0}dr$$

$$!\left(\int x^2 e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)\right)! \qquad \text{wo} \quad a = -2/a_0$$

$$\Rightarrow \int_0^R r^2 e^{-2r/a_0}dr = \left[e^{-2r/a_0}\left(-\frac{r^2}{2}a_0 - \frac{r}{2}a_0^2 - \frac{1}{4}a_0^3\right)\right]_0^R$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a_0^3}\left[e^{-2R/a_0}\left(-\frac{R^2}{2}a_0-\frac{R}{2}a_0^2-\frac{1}{4}a_0^3\right)+\frac{1}{4}a_0^3\right]=1-e^{-2R/a_0}\left[1+\frac{2R}{a_0}+\frac{2R^2}{a_0^2}\right]$$

a) $R=2a_0=105.8\text{pm}$

$\Rightarrow\ 2R/a_0=4 \qquad \Rightarrow 1-e^{-4}[1+4+8]=1-13e^{-4}\approx 0.7$

b) $R=2\text{pm}$

$\Rightarrow 2R/a_0=4/a_0 \quad a_0=52.9$

$$\Rightarrow 1-e^{-4/52.9}\left[1+\frac{4}{52.9}+\frac{8}{(52.9)^2}\right]\approx 6.5\cdot 10^{-5}$$

3.

$\Delta r \bullet \Delta p \cong (\geq !)\ \hbar \qquad \Rightarrow\ r \bullet p \cong \hbar$

Grundzustand $\Rightarrow E_{min} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dE}{dr}=0$

$$E=\frac{\left(\frac{\hbar}{r}\right)^2}{2m}-\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)r}$$

$$\frac{dE}{dr}=-\frac{\hbar^2}{mr^3}+\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)r^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)r^2}=\frac{\hbar^2}{mr^3}$$

$$\Rightarrow \langle r_{GZ}\rangle=\frac{\hbar^2\cdot 4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}{m\cdot e^2}=a_0=0.53\text{Å}$$

Substituiere r_{GZ} in E

$$E_{GZ}=\frac{\hbar^2}{2mr^2}-\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)r}$$

$$E_{GZ}=-\frac{\hbar^2 m^2 e^4}{\hbar^4 4^2\pi^2\varepsilon_0{}^2 m}-\frac{e^2 me^2}{(4\pi\varepsilon_0)\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^2}-\frac{me^4}{16\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^2}$$

$$=-\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^2}=-13.6\text{eV}$$

4.

Intensität nach einen Polarisator $\qquad I_{i+1}=\cos^2(\alpha)\bullet I_i$

$I_0=1.0$

Intensität mit horizontale Polarisationsrichtung $I_{\perp} = \left(\prod_n \cos^2(\alpha)\right) \cdot I_0$

$\Rightarrow 0.7 = \cos(\alpha)^{2n} \cdot 1;$ α ist gegeben als $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}$

$\alpha = \frac{\pi}{2n}$

$\Rightarrow 0.7 = \cos(\frac{\pi}{2n})^{2n};$

Einsetzen:

mit $n = 7$; $I_{\perp} = 0.70 I_0$

mit $n = 6$; $I_{\perp} = 0.66 I_0$

7 Polarisatoren werden benötigt