10. Übungsblatt zur Vorlesung PCII

WS 2003/2004 Ausgabe: 12.1.2003 Abgabe 19.1.2003 (10:15 Uhr)

Aufgabe 1:

Gegeben seien die 2-dimensionalen Spinoperatoren in Matrixdarstellung:

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}^2 = \frac{3\hbar}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Operatoren sind miteinander vertauschbar? Bestimmen Sie explizit die Kommutatoren: $[\hat{s}_x, \hat{s}_y]$, $[\hat{s}_x, \hat{s}_z]$, $[\hat{s}_x, \hat{s}^2]$, $[\hat{s}_z, \hat{s}^2]$.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Kugelwellenfunktionen $Y_{l,m}$: $\quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$ und $Y_{1,1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \cdot e^{i\varphi}$

und die Drehimpulsoperatoren in Kugelkoordinaten:

$$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}; \quad \hat{l}^2 = -\frac{\hbar^2}{\sin^2\theta}\left\{\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}$$

Zeigen Sie, dass beide Kugelfunktionen Eigenfunktionen der beiden Operatoren sind, d.h.

es gilt: $\hat{l}_z Y_{l,m} = \hbar m Y_{l,m}$ und $\hat{l}^2 \, Y_{l,m} = \hbar^2 \, l \cdot (l+1) \, Y_{l,m}$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie für die beiden Kugelwellenfunktionen Y_{00}, Y_{10} und Y_{20}, daß Sie orthonormiert zueinander sind.

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie für die beiden Radialfunktionen:

$$R_{10} = 2 \cdot \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} \qquad R_{20} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \cdot \left(2 - r/a_0\right) e^{-\frac{r}{a_0}}$$

das Integral als Funktion der oberen Grenze r_e: $\quad U_{nl}(r_e) = \int_0^{r_e} R_{nl} \cdot r^2 \, dr$

b) Zeichnes Sie diese beiden Integralfunktionen als Funktion von r_e und bestimmen Sie graphisch für beide Integrale den Wert von r_e für den das Integral den Wert 0.9 annimmt.