Einige Rechenregeln für partielle Differentiale

z = f(*x*,*y*)

1) Satz von Schwarz

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Funktion stetig und differenzierbar, Abl. stetig ⇒ Existenz einer Tangentialebene.

2) Totales Differential

$$d\,z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$ (Zustandsfunktion)

3) Invertorregel

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1}$$ (Umkehrfunktion)

4) Permutatorregel

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

5) Eulersche Kettenregel

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$ (folgt aus **4)** und **3)**)

6)

z = f(*x(u)*,*y(u)*)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u$$

Zur Übung:

a) Bilden Sie $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ für die folgenden Funktionen:

i) $z = x^2 + y^3$

ii) $z = x^2 y^3 + \sin y \cos xy$

iii) $z = x \sin y + y e^x$

iv) $z = a\sqrt{x + 2y} + x e^y$

b) Gilt der Satz von Schwarz?

c) Wie lautet das totale Differential von z?

d) Stellt $ydx + xdy$ bzw. $ydx - xdy$ ein totales Differential dar? Wie lautet z(*x*,*y*)?