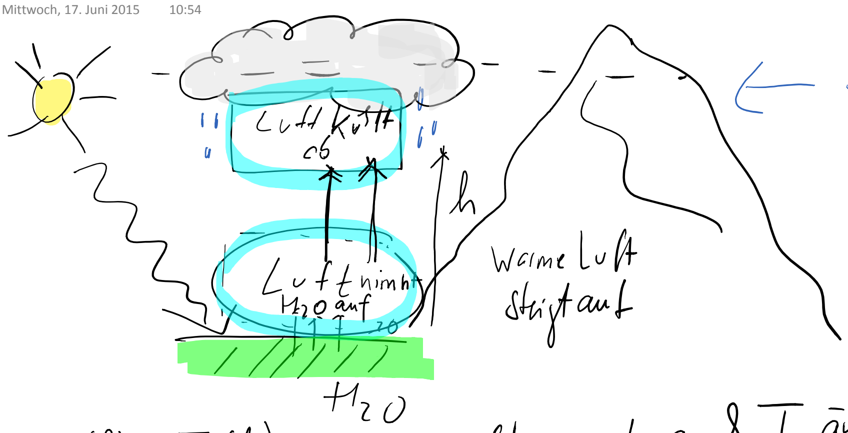
Wolkenbildung

Mittwoch, 17. Juni 2015 10:54



← Höhe bei der der Wasserdampf kondensiert

$p(h)$, $T(h)$, sowohl p als auch T ändern sich mit Höhe, sowohl für stehende Umgebungsluft als auch für aufsteigende Luft

$$\frac{dT}{dh} = -\gamma \qquad \left(\gamma = 0.65 \cdot 10^{-2} \frac{K}{m}\right)$$

$\{0 - 10\ km\}$

$$\boxed{T(h) = T_G\left(1 + \frac{\gamma}{T_G} \cdot h\right)}$$ ← aus der Metrologie

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g \qquad \rho = \frac{m_L}{V_L} = \frac{m_L \cdot P}{n_L \cdot R \cdot T}$$

$$\rho = \frac{M_L \cdot P}{R \cdot T}$$

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{M_L \cdot p \cdot g}{R\, T_G\left(1 - \frac{\gamma}{T_G} h\right)}$$

$$\frac{1}{p}\, dp = -\frac{M_L \cdot g}{R \cdot T_G} \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma}{T_G} \cdot h\right)} \cdot dh$$

$$\underbrace{\int_{P_G}^{P} \frac{1}{p}\, dp}_{\ln \frac{P}{P_G}} = -\frac{M_L \cdot g}{R \cdot T_G} \int_0^h \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma}{T_G} \cdot h\right)}\, dh$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 1 - \frac{\gamma}{T_G} \cdot h \\ \frac{du}{dh} = -\frac{\gamma}{T_G} \end{array}\right\} du = -\frac{\gamma}{T_G} \cdot dh$$

$$\frac{M_L \cdot g T}{} \int^{1 - h\frac{\gamma}{T_G}} \frac{1}{}$$

$$= \frac{M_L \cdot g \cancel{T_G}}{R \cdot \cancel{T_G}\, \gamma} \int_1^{1-h\frac{\gamma}{T_G}} \frac{1}{u}\, du$$

$$\ln \frac{p}{p_G} = \left(\frac{M_L \cdot g}{R \cdot \cancel{T_G}\, \gamma}\right) \ln\left(1 - \frac{\gamma}{T_G} \cdot h\right)$$

$$\frac{p}{p_G} = \left(1 - \frac{\gamma}{T_G} \cdot h\right)^{\frac{M_L \cdot g}{R\gamma}}$$

$$\boxed{p(h) = p_G \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{T_G} h\right)^{\frac{M_L \cdot g}{R\gamma}}}$$

Druck als Fkt. der Höhe h

$$\frac{\gamma h}{T_G} \ll 1 \rightarrow (1-x)^n \approx 1 - nx$$ (gute Näherung für $h < 5\,km$)

$$p(h) = p_G\left(1 - \frac{M_L g}{T_G R} \cdot h\right) = p_G - \Delta \cdot h$$

$$\Delta = \frac{p_G \cdot M_L \cdot g}{T_G\, R} \approx 12\, \frac{N}{m^3}$$

$\Delta p = 1\,mbar$ auf $8\,m$ Höhe $\}$ Barom. Höhenstufe

$$1 - \frac{\gamma}{T_G} h \approx \exp\left\{-\frac{\gamma}{T_G} h\right\}$$

$$\boxed{p = p_G \cdot \exp\left\{-\frac{M_L\, g}{R \cdot T_G} \cdot h\right\}}$$

Barometrische Höhenformel

Beschreibung des Aufsteigens der erwärmten Luft durch einen adiabatischen Prozess

$$\delta Q = 0 \qquad T_{auf.\,Luft} \neq T_{stehende\,Luft}$$

$$p_{auf.\,Luft} = p_{umgebung}$$

$$\boxed{dQ = dH - V\,dp}$$

$$V(T) = m_L \left[\frac{R}{M_L} + x \frac{R}{M_W} \right] \frac{T}{p} \quad \Big\}\ \text{ideales Gas}$$

$$x \equiv \text{Feuchtegrad} \equiv \frac{m_W}{m_L} = X_W^g \cdot \frac{M_W}{M_L}$$

$$dH = m_L \left[c_p^L + x\, c_p^W \right] dT$$

einsetzen:

$$\cancel{m_L} \left(c_p^L + x\, c_p^W \right) \underline{dT} = \cancel{m_L} \left(\frac{R}{M_L} + x \cdot \frac{R}{M_W} \right) \frac{T}{p} \underline{dp}$$

$$\left(c_p^L + x\, c_p^W \right) \frac{1}{T} dT = \left(\frac{R}{M_L} + x \frac{R}{M_W} \right) \frac{1}{p}\, dp$$

falls $c_p \neq f(T)$

$$\left(c_p^L + x\, c_p^W \right) \underbrace{\int_{T_G}^{T} \frac{1}{T} dT}_{\ln \frac{T(h)}{T_G}} = \left(\frac{R}{M_L} + x \frac{R}{M_W} \right) \underbrace{\int_{p_G}^{p} \frac{1}{p}\, dp}_{\ln \frac{p(h)}{p_G}}$$

$$\ln \frac{T(h)}{T_G} = \ln \left(\frac{p(h)}{p_G} \right) \cdot \underbrace{\frac{\left(R/M_L + x\, R/M_W \right)}{\left(c_p^L + x\, c_p^W \right)}}_{\frac{R}{c_p^L M_L} \frac{\left(1 + x \frac{M_L}{M_W}\right)}{\left(1 + x \frac{c_p^W}{c_p^L}\right)} = K}$$

$$\boxed{T(h) = T_G \cdot \left(\frac{p(h)}{p_G} \right)^K}$$

Temperatur der aufsteigenden Luft

$$\boxed{T(h) = T_G \cdot \left(\frac{p(h)}{p_G}\right)}$$

Temperatur der aufsteigenden Luft

Ausdruck für $\underline{p(h)}$ eingesetzt:

$$T(h) = T_G\left(1-\frac{\gamma}{T_G}\cdot h\right)^{\left\{\frac{g}{\gamma c_p^L}\frac{\left(1+x\frac{M_L}{M_W}\right)}{\left(1+x\frac{c_p^W}{c_p^L}\right)}\right\}}$$

$$\boxed{\underline{p_W}(h) = \frac{1}{V(h)}\cdot\frac{m_W}{M_W}\cdot R\cdot T(h)}$$

(ideale Gas-Gleichung)

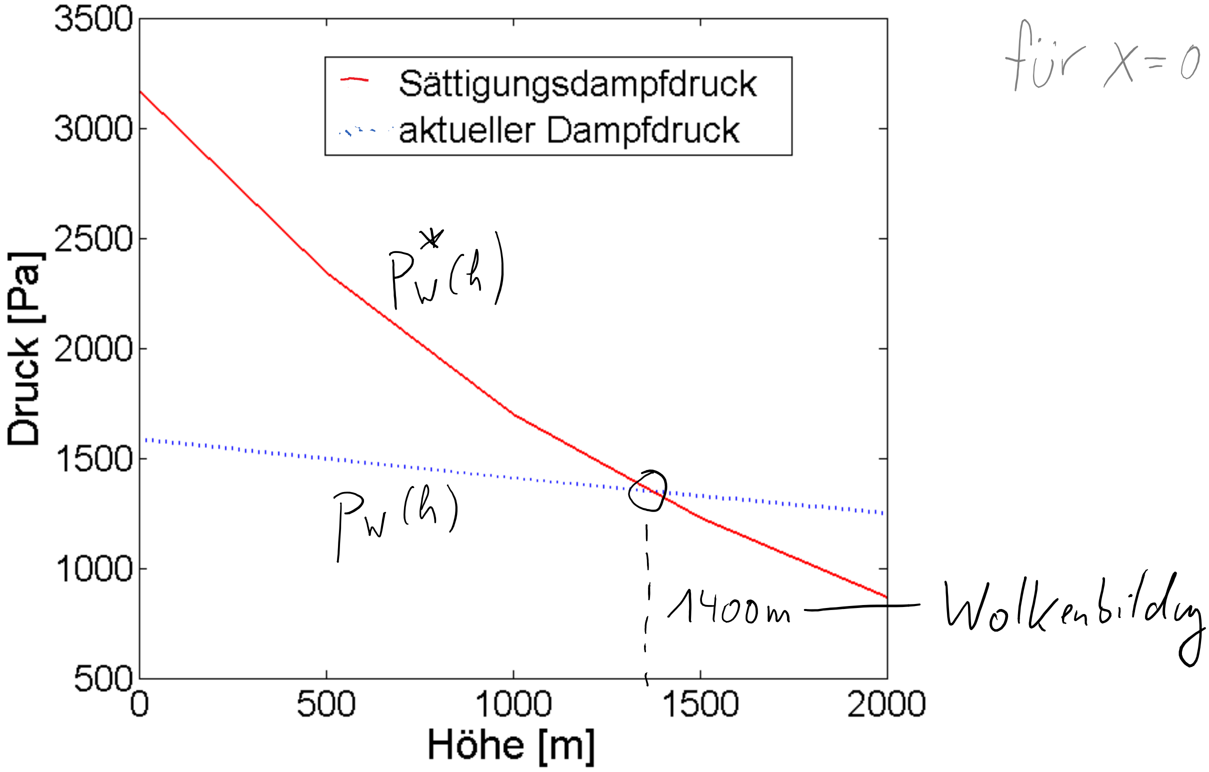
$V(h)$ und $T(h)$ eingesetzt liefert:

$$\boxed{p_W(h) = p_G\,\frac{x}{\left(\frac{M_W}{M_L}+x\right)}\left(1-\frac{\gamma}{T_G}\cdot h\right)^{\frac{M_L g}{R\gamma}}}$$

Vergleiche $p_W(h)$ mit Sättigungsdampfdruck $p_W^*(T)$ (aus Clausius-Clapeyron)

falls $p_W(h) < p_W^*(h)$ Wasser in Luft bleibt gasförmig

falls $p_W(h) > p_W^*(h)$ Wasser in Luft kondensiert für $x = 0.01$



Sättigungsdampfdruck
aktueller Dampfdruck
Druck [Pa]
Höhe [m]
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
500
1000
1500
2000
$p_w^*(h)$
$p_w(h)$
1400m
Wolkenbildung

Reale Mischungen

Flüssigphase: ideale Mischungen (WW A-A = WW A-B = WW B-B)

$$\Delta_M H = 0 \quad \Delta_M V = 0$$

$$\Delta_M S = R\,(x_A \ln x_A + x_B \ln x_B)$$

$$\mu_A(p,T,x_B) = \mu_A^*(p,T) + RT \ln x_A$$

reale Mischungen ($\Delta_M H \neq 0$, $\Delta_M V \neq 0$)

$$\Delta_M S^{real} = \Delta_M S^{ideal}$$ reguläre Lösungen

$$\underbrace{\mu_A(p,T,x_B)}_{\text{(Mischphase)}} = \mu_A^*(p,T) + RT \ln a_A(p,T,x_B)$$

Aktivität $a_A = \underbrace{f_A}_{\text{Aktivitätskoeffizient}} \cdot x_A$

Gasphase $$\underbrace{\mu_A(p,T,x_B)}_{\text{Mischung}} = \mu_A^*(p_A,T) + RT \ln f_{gA}(p,T,x_B)$$

Fugazität von A: $f_{gA} = x_A \cdot \frac{p}{p_A^*(T)} \cdot \underbrace{\varphi_A}_{\text{Fugazitäts-koeffizient}}$

ideales Gas $\varphi_A = 1$

$$f_{gA} = \frac{x_A \cdot p}{p_A^*} = \frac{p_A}{p_A^*}$$

p_A } Partialdruck von A in Mischung

p_A^* } Druck von A als Reinstoff

$$\mu_A(T,p,x_B) = \mu_A^*(T,p_A^*) + RT \ln f_{gA}$$

$$f_{gA} = x_A \cdot \frac{p}{p^*} \quad \text{für ideales Gas}$$

$$\mu_A(T,p,x_B) = \underbrace{\mu_A^*(T,p_A^*)}_{} + RT\ln x_A + \underbrace{RT\ln\frac{p}{p_A^*}}_{}$$

$$\boxed{\mu_A(T,p,x_B) = \mu_A^*(T,p) + RT\ln x_A} \checkmark$$

Flüssig-Gas Gleichgewicht

α flüssig	β gasförmig
A + B	A + B

$$\underbrace{\mu_A^{\alpha}(T,p,x_B^{\alpha})} = \underbrace{\mu_A^{\beta}(T,p,x_B^{\beta})}$$

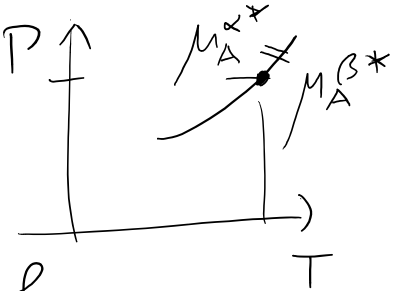
$$\underbrace{\mu_A^{\alpha *}(T,p)} + \underline{RT\ln a_A^{\alpha}} = \mu_A^{\beta *}(T,\underline{p_A}) + RT\ln f_{gA}$$

$$\mu_A^{\alpha *}(T,p) = \mu_A^{\alpha *}(T,p_A) + \underline{V_A^{m\alpha}}(p-p_A^{*})$$

für inkompressible Flüssigkeiten $V \neq f(p)$

$$\cancel{\underline{\mu_A^{\alpha *}(T,p_A^{*})}} + V_A^{m\alpha}(p-p_A^{*}) + RT\ln a_A^{\alpha}$$

$$= \cancel{\underline{\mu_A^{\beta *}(T,p_A^{*})}} + RT\ln f_{gA}$$



$$\underbrace{\frac{V_A^{m\alpha}}{RT}(p-p_A^{*})} + \ln a_A^{\alpha} = \ln f_{gA}$$

$$\ln\left\{\exp\left(\frac{V_A^{m\alpha}}{RT}(p-p_A^{*})\right)\right\} + \ln a_A^{\alpha} = \ln f_{gA}$$

$$\boxed{a_A^\alpha \cdot \exp\left\{\frac{V_A^{m\alpha}}{RT}(p-p_A^\alpha)\right\} = f_{gA}}$$

$$\underbrace{a_A^\alpha}_{f_A^\alpha \cdot x_A^\alpha} \qquad \underbrace{f_{gA}}_{\varphi_A^\beta \cdot x_A^\beta \cdot \frac{p}{p_A}}$$

$$V_A^{\beta m} \approx \frac{RT}{p} \quad \text{ideales Gas}$$

$$\exp\left\{\frac{V_A^{m\alpha}(p-p_A)}{RT}\right\} \approx \exp\left(\underbrace{\frac{V_A^{m\alpha}}{V_A^{m\beta}}}_{\ll 1}\right) \approx 1$$

$$\boxed{f_A^\alpha(T,p,x_B^\alpha) \cdot x_A^\alpha = \varphi_A^\beta(p,T,x_B^\beta) \cdot x_A^\beta \cdot \frac{p}{p_A^*}}$$

Raoult-Gesetz für reale Mischungen

Bestimmung des Aktivitätskoeffizienten f_A

(Dampfphase ideal angenommen $\varphi_A^\beta = 1$)

$$f_A^\alpha(T, p, x_B^\alpha) \cdot x_A^\alpha = \frac{p}{p_A^*} x_A^\beta$$

$$\underline{f_A^\alpha(T, p, x_B^\alpha)} = \frac{p}{p_A^*} \frac{x_A^\beta}{\underline{x_A^\alpha}} = \frac{p_A}{p_A^*}\frac{1}{x_A^\alpha} = \frac{p_A}{p_A^* x_A^\alpha} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$$

p_A, p, p_A^* sind leicht zugängliche Meßgrößen

x_A^α: Durch Einwaage bestimmt

ebenso für $f_B^\alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}$