Larmor Präzession

Dynamik der Spins (magn. Momenten) wird durch zeitabhängige SG beschrieben: $\hat{\mathcal{H}}\chi = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}$

$\hat{\mathcal{H}}$: Spin-Hamilton Operator
χ: Spin-Wellenfkt.

$S = \frac{1}{2}$, $m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rightsquigarrow$ 2 Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$

$$|\chi\rangle = c_1(t)\,|\alpha\rangle + c_2(t)\,|\beta\rangle = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

Spin-Hamilton-Operator Zeeman WW: $\hat{\mathcal{H}} = -\hat{\vec{\mu}}_s \cdot \vec{B}_0$

$\hat{\vec{\mu}}_s = \hbar \gamma_s \hat{\vec{S}}$

$\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$

$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$

Pauli-Spin Matrizen für $S = \frac{1}{2}$:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\hat{\mathcal{H}} = -\hbar \gamma_s B_0 \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Einsetzen in SG: $i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{\hbar \gamma_s B_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$

2 DG 1. Ordnung:

$$\dot{c}_1(t) = \frac{i\gamma_s B_0}{2} c_1(t) = \frac{i\omega_L}{2} c_1(t)$$

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{i\gamma_s B_0}{2} c_2(t) = -\frac{i\omega_L}{2} c_2(t)$$

mit $\omega_L = \gamma_s B_0$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1(t) &= c_1(0) \cdot e^{\frac{i\omega_L t}{2}} \\ c_2(t) &= c_2(0) \cdot e^{-\frac{i\omega_L t}{2}} \end{aligned}}$$

Erwartungswerte:

$$\langle \hat{S}_x \rangle = \langle \chi | \hat{S}_x | \chi \rangle = \frac{1}{2}\left(c_1^*(0)\, c_2(0) \cdot e^{-i\omega_L t} + c_2^*(0)\, c_1(0)\, e^{i\omega_L t} \right)$$

$$\langle \hat{S}_y \rangle = \langle \chi | \hat{S}_y | \chi \rangle = \frac{i}{2}\left(-c_1^*(0)\, c_2(0)\, e^{-i\omega_L t} + c_2^*(0)\, c_1(0)\, e^{i\omega_L t} \right)$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \langle \chi | \hat{S}_z | \chi \rangle = \frac{1}{2}\left(c_1^*(0)\, c_1(0) - c_2^*(0)\, c_2(0) \right)$$ zeitunabhängig

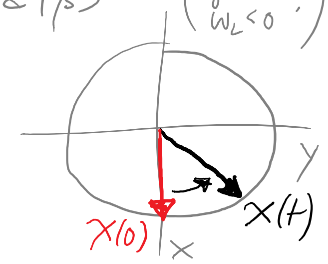
Beispiel A: $\chi(0) = |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \langle \hat{S}_z \rangle = +\frac{1}{2}$, $\langle \hat{S}_x \rangle = \langle \hat{S}_y \rangle = 0$ keine x, y Komponente

{genauso für $\chi(0) = |\beta\rangle$, dort $\langle \hat{S}_z \rangle = -\frac{1}{2}$}

Beispiel B: $\chi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Überlagerungszustand von $|\alpha\rangle$ & $|\beta\rangle$ ($\gamma_s < 0$! $\omega_L < 0$!)

$\langle \hat{S}_z \rangle = 0$, $\langle \hat{S}_x \rangle = \frac{1}{2}\cos(\omega_L t)$, $\langle \hat{S}_y \rangle = -\frac{1}{2}\sin(\omega_L t)$

Präzession in der x-y Ebene mit Larmorfrequenz ω_L



Rabi Nutation

mit MW-Feld $\vec{B}_1(t)$ $\quad \vec{B}_1(t) \perp \vec{B}_0$ zirkular polarisiert in x-y Ebene

$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0) \qquad \vec{B}_1 = B_1(\cos\omega_{MW}t, \sin\omega_{MW}t, 0)$

Spin-Hamilton-Operator $\quad \hat{\mathcal{H}} = -\hbar\omega_L \hat{S}_z + \hbar\omega_1\left(\cos\omega_{MW}t\,\hat{S}_x + \sin\omega_{MW}t\,\hat{S}_y\right)$

$(\omega_1 = |\gamma_s|\cdot B_1) \quad \omega_1 > 0$

Einsetzen in SG:

$$i\dot{c}_1(t) = -\frac{\omega_L}{2}c_1(t) + \frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega_{MW}t}c_2(t)$$
$$i\dot{c}_2(t) = \frac{\omega_1}{2}e^{i\omega_{MW}t}c_1(t) + \frac{\omega_L}{2}c_2(t)$$

gekoppelte DG

Definiere neue Fktn: $\quad b_1(t) = e^{i\frac{\omega_{MW}}{2}t}c_1(t), \quad b_2(t) = e^{-i\frac{\omega_{MW}}{2}t}c_2(t)$

$$i\dot{b}_1(t) = -\frac{\Delta\omega}{2}b_1(t) + \frac{\omega_1}{2}b_2(t) \qquad (\Delta\omega = \omega_L + \omega_1)$$
$$i\dot{b}_2(t) = \frac{\omega_1}{2}b_1(t) + \frac{\Delta\omega}{2}b_2(t)$$

Bemerkung: Dies entspricht einer Transformation in ein mit dem MW-Feld rotierenden KS

$$\chi_{rot} = e^{i\omega_{MW}t\hat{S}_z}\cdot\chi_{Labor}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{rot} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Delta\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega \end{pmatrix} = \underbrace{\Delta\omega\hat{S}_z}_{\text{Skaliertes Zeemann Feld}} + \underbrace{\omega_1\hat{S}_x}_{\text{stationäres MW Feld}}$$

Betrachte den 'on-Resonanz' Fall $\quad \omega_1 = -\omega_L, \quad \Delta\omega = 0$

$$\left.\begin{aligned} \dot{b}_1(t) &= -i\frac{\omega_1}{2}b_2(t) \\ \dot{b}_2(t) &= -i\frac{\omega_1}{2}b_1(t) \end{aligned}\right\} \quad \ddot{b}_1(t) = -i\frac{\omega_1}{2}\dot{b}_2(t) = -\frac{\omega_1^2}{4}b_1(t)$$

Ansatz für Lösung: $\quad b_1(t) = a\cdot e^{i\lambda t}$

Löst 2. Ordnung DG für $\lambda = \pm\frac{\omega_1}{2}$

Generelle Lösung:

$$b_1(t) = a_1\cdot e^{i\frac{\omega_1}{2}t} + a_2\cdot e^{-i\frac{\omega_1}{2}t}$$
$$b_2(t) = d_1\cdot e^{i\frac{\omega_1}{2}t} + d_2\cdot e^{-i\frac{\omega_1}{2}t}$$

Anfangsbedingung: $\quad \chi(0) = |\alpha\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

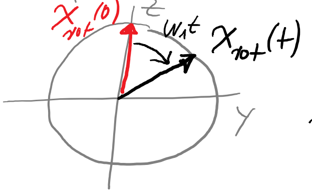
$\rightsquigarrow c_1(0) = 1, \; c_2(0) = 0$

$\rightsquigarrow b_1(0) = 1, \; b_2(0) = 0$

$\rightsquigarrow a_1 + a_2 = 1, \; d_1 + d_2 = 0$

$$\hookrightarrow \begin{aligned} b_1(t) &= \cos(\omega_1/2\, t) \\ b_2(t) &= i\sin(\omega_1/2\, t) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \langle S_x\rangle &= 0 \\ \langle S_y\rangle &= \tfrac{1}{2}\sin(\omega_1 t) \\ \langle S_z\rangle &= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_1 t) \end{aligned}$$

im rot. KS



Rabi-Nutation